現代物理学概論 中間試験

June 16, 2000

1(a) [5 点]

$\lambda = 0.78\,\mu\mathrm{m}$ ． 光子 1 個あたりのエネルギーは $hc/\lambda = 2.5 \times 10^{-19}\,\mathrm{J} = \mathbf{1.6}\,\mathrm{eV}$ ．

(b) [5 点]

波長より小さいものは見えないから，$p = h/\lambda = 6.6 \times 10^{-25}\,\mathrm{kg\,m/s} = 1.2\,\mathrm{keV}/c$ ．運動エネルギーは $p^2/(2m_e) = 1.5\,\mathrm{eV}$ ．

2(a) [5 点]

$E \geq 0$： 束縛状態ではない．連続スペクトル．$E < 0$： あるとしたら束縛状態で離散スペクトル．

(b) [3 点]

$A, m, \hbar$ 以外に基底エネルギーが依存できる物理量はないと思われる．$[A] = EL^{1/2},\ [m] = M = EL^{-2}T^{-2},\ [\hbar] = ET$ ． ここで次元を $[]$ で表し，M, L, T, E はそれぞれ質量，長さ，時間，エネルギー，の次元を表す．$A^\alpha m^\beta \hbar^\gamma$ の形でエネルギーの次元を持つのは $A^{4/3}(m/\hbar^2)^{1/3}$ だけであるので基底エネルギーはこれの定数倍でなければならない．

(c) [7 点]

不確定性原理をを用いて

$$E_{\text{基底}} = \frac{p^2}{2m} + V(x) \gtrsim \frac{(\Delta p)^2}{2m} - A(\Delta x)^{-\frac{1}{2}} \gtrsim \frac{\hbar^2}{2m(\Delta x)^2} - A(\Delta x)^{-\frac{1}{2}}$$

右辺を最小化するのは

$$\Delta x = \left(\frac{2\hbar^2}{Am}\right)^{2/3} \quad \text{のとき} \quad E_{\text{基底}} \simeq -3 \cdot 2^{1/3} A^{4/3} \left(\frac{m}{\hbar^2}\right)^{1/3}$$

((b) の次元解析の予想通であることに注意．) これより判断する限りでは A, m の値に関わらず束縛状態は存在する．

3(a) [8 点]

$V(x) = V_0(1 - x/a)$ $(0 < x < a)$ で他の領域では $V(x) = 0$ ．$0 < x < b$ は古典的に禁止されている領域．ただし，$E = V_0(1 - b/a)$ で b を定義した．公式を用いて

$$T \simeq \exp\left[-\frac{2}{\hbar}\sqrt{\frac{2mV_0}{a}}\int_0^b dx\,\sqrt{b-x}\right] = \exp\left[-\frac{4a}{3\hbar}\sqrt{2mV_0}\left(1 - \frac{E}{V_0}\right)^{3/2}\right]$$

(b) [2 点]

E/V_0 を大きくすれば障壁が小さくなるので透過確率は大きくなる．

(c) [5 点]

おおざっぱには $1 - E/V_0 = 0.9 \simeq 1$ で

$$T \simeq \exp\left[-\frac{4 \cdot 2\,\mathrm{fm} \times 400\,\mathrm{MeV}/c}{3 \cdot 1.1 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}}\right] = e^{-2.6} = 0.07$$